Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a V-a

Problema 1. Sebi și Raul au mers împreună la pescuit. Fiecare dintre ei a eliberat doi pești dintre cei pe care i-a prins și i-a păstrat pe restul. Sebi a prins două treimi din numărul total de pești prinși, iar Raul a păstrat un sfert din numărul total de pești păstrați. Câți pești a prins fiecare copil?

Problema 2. Câtul împărțirii numărului 2024 la $\overline{ab}$ este $\overline{abb}$. Aflați restul acestei împărțiri.

Gazeta Matematică

Problema 3. Pentru fiecare număr natural m notăm suma cifrelor sale cu $s(m)$.

a) Arătați că nu există niciun număr natural n de 3 cifre pentru care $s(n)$ și $s(n+4)$ sunt multipli de 6.

b) Determinați numerele naturale p de 3 cifre pentru care $s(p)$ și $s(p+4)$ sunt multipli de 7.

Problema 4. Se consideră un tabel cu 4 linii și 4 coloane pe care îl completăm cu numerele de la 1 la 13 astfel încât pe prima linie să apară același număr în fiecare pătrățică, iar pe ultimele trei linii celelalte 12 numere.

a) Determinați valorile numărului de pe prima linie astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie a tabelului să fie aceeași. Pentru fiecare valoare găsită construiți un tabel corespunzător.

b) Determinați valorile numărului de pe prima linie astfel încât suma numerelor de pe fiecare coloană a tabelului să fie aceeași. Pentru fiecare valoare găsită construiți un tabel corespunzător.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a VI-a

Problema 1. Considerăm mulţimile:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 1000 \text{ şi } n \text{ dă restul 2 la împărţirea cu 3}\},$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 1000 \text{ şi } n \text{ dă restul 1 la împărţirea cu 7}\}.$$

a) Care este cel mai mic element al mulțimii $A \cap B$?

b) Aflaţi numărul elementelor mulţimii $A \cup B$.

Gazeta Matematică

Problema 2. Determinați numărul natural prim x și numărul natural nenul y având proprietatea $\dfrac{x}{2y} = \dfrac{x+1}{x+y+8}$.

Problema 3. Triunghiul ABC este isoscel și are $\angle BAC = 100°$. Cercul de centru C și rază CA taie segmentul BC în D, cercul de centru D și rază DB taie segmentul AB în punctul interior E și cercul de centru D și rază DA taie segmentul AC în punctul interior F.

a) Arătaţi că $CF = DE$.

b) Paralela prin punctul F la dreapta AB taie latura BC în M. Arătaţi că $MD = AE$.

Problema 4. Vom numi *lente* numerele naturale nenule L care au cel puțin patru divizori și, dacă $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_p = L$ sunt divizorii lui L, atunci fiecare număr din șirul divizorilor, începând cu al patrulea, este mai mic sau egal decât suma a trei dintre divizorii precedenți.

a) Arătați că 72 este un număr lent.

b) Demonstrați că produsul oricăror două numere lente este tot un număr lent.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale x pentru care $\{x\} - \{2026 \cdot x\} = x$.
(*Notația* $\{a\}$ *reprezintă partea fracționară a numărului real* a.)

Problema 2. a) Arătaţi că există numere naturale nenule a şi b pentru care numărul $\sqrt{a^2 + 2026 \cdot b^2}$ este raţional.

b) Care este cel mai mic număr natural nenul b pentru care există un număr natural a astfel ca $\sqrt{a^2 + 2026 \cdot b^2}$ să fie număr raţional?

Gazeta Matematică

Problema 3. Considerăm triunghiul ABC cu $AB = AC = 2 \cdot BC$. Perpendiculara dusă în punctul C pe dreapta AC intersectează mediatoarea segmentului AB în punctul D. Fie M mijlocul segmentului AD, N mijlocul segmentului AB și P intersecția dreptelor BM și DN.

a) Demonstrați că $PC \perp CB$.

b) Demonstrați că $DC = 2 \cdot PC$.

Problema 4. Considerăm un triunghi dreptunghic isoscel ABC și notăm cu M mijlocul ipotenuzei AC, cu N mijlocul segmentului CM, cu P piciorul perpendicularei din M pe BN, cu E piciorul perpendicularei din A pe BN și cu R piciorul perpendicularei din M pe AE.

Arătați că R este centrul de greutate al triunghiului ABP.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026

CLASA a VIII-a

Problema 1. a) Determinați numerele reale x pentru care numerele $x+\sqrt{3}$ și $3x^2+\sqrt{3}$ sunt raționale.

b) Arătați că nu există niciun număr real y astfel încât numerele $y+\sqrt{3}$ și $3y^2+y^3+\sqrt{3}$ să fie raționale.

Problema 2. Arătați că numărul $\sqrt{(\overline{xxx}-y)^2+(\overline{yyy}-x)^2}$ este irațional, oricare ar fi cifrele distincte nenule x și y.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, M, N, P mijloacele muchiilor AB, CC', respectiv $A'C'$ și punctul Q pe muchia BC, astfel încât $AB = 18\text{cm}$, $AA' = 3\sqrt{3}\text{cm}$ și $BQ = 10\text{cm}$.

a) Arătați că $AB \perp (CMC')$.

b) Arătați că dreptele MN și PQ sunt perpendiculare.

Problema 4. Un cub cu latura de lungime $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, este împărțit în 297 de cuburi, dintre care unul are latura de lungime x, $x \neq 1$, iar restul au latura de lungime 1.

a) Arătați că $\ell \in \mathbb{N}$.

b) Determinați valoarea numărului ℓ.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a IX-a

Problema 1. Considerăm numerele reale a, b, c şi ecuaţiile $x^2 + 4ax + (b+c)^2 = 0$, $x^2 + 4bx + (c+a)^2 = 0$, respectiv $x^2 + 4cx + (a+b)^2 = 0$.

a) Arătaţi că cel puţin una dintre cele trei ecuaţii are soluţii reale.

b) Demonstraţi că dacă ecuaţiile admit o soluţie reală comună atunci $a = b = c$.

Problema 2. Fie patrulaterul convex $ABCD$, punctul O de intersecţie a diagonalelor sale şi G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ABC, respectiv ODC. Demonstraţi că O este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Gazeta Matematică

Problema 3. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care numărul

$$4^{n-1} + n^2 + 11$$

este pătrat perfect.

Problema 4. Determinaţi şirurile $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale nenule care verifică simultan următoarele două condiţii:

$$(1)\ i + j \text{ divide } a_i + a_j;$$

$$(2)\ a_i + a_j \text{ divide } (i+j)^2,$$

pentru orice i, j numere naturale nenule.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a X-a

Problema 1. Se consideră numerele reale $a, b, x, y > 0$, cu $ab \neq 1$, şi c un număr natural nenul astfel încât

$$\log_a \sqrt{x} = \log_b \sqrt{cx + y} = \log_{ab} y.$$

a) Arătaţi că dacă $c = 1$, atunci numărul $\dfrac{y}{x}$ este iraţional.

b) Demonstrați că numărul $\dfrac{y}{x}$ este rațional dacă şi numai dacă c este produsul a două numere naturale nenule consecutive.

Problema 2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ care satisfac simultan condiţiile

(1) $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$;
(2) $\overline{f(z)} = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$;
(3) $\overline{z}\, f(z) \in (0, \infty)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2 + 5 \cdot 6^x = 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x$.

Problema 4. Pentru orice mulţime finită $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ de numere complexe nenule cu $n \geq 4$ elemente definim mulţimea:

$$B(A) = \left\{ z_i z_j \;\middle|\; 1 \leq i < j \leq n \right\}.$$

Determinați mulțimile A pentru care $A = B(A)$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă, cu proprietatea

$$\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Arătaţi că $\det(A + A^{-1}) = (\mathrm{Tr}(A))^2$, unde $\mathrm{Tr}(A)$ este suma elementelor diagonalei principale a matricei A.

Problema 2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu $x_1, x_2 \in (0,1)$, pentru care

$$x_{n+2} = x_n^2 \cdot x_{n+1} - x_n^2 + 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 \dots x_n = 0$.

b) Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_1 x_2 \dots x_n$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi toate matricele $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că, dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = M$, atunci $BA = M$.

Problema 4. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi neconstantă. Considerăm funcţia $g : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(y) = \inf\{x \in [0,1] \mid f(x) = y\}, \text{ pentru orice } y \in \mathrm{Im}(f),$$

unde $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in [0,1]\}$. Demonstraţi că funcţia g este continuă dacă şi numai dacă există $a \in (0,1]$ astfel încât f este strict monotonă pe intervalul $[0,a]$ şi $\mathrm{Im}(f) = f([0,a])$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă pe $\mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0 \qquad \text{şi} \qquad \int_0^1 x\cdot f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\cdot f(x)\,dx\,.$$

a) Demonstraţi că dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de gradul al doilea, având graficul simetric în raport cu dreapta de ecuaţie $x=\dfrac{1}{2}$, atunci

$$\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx=0\,.$$

b) Demonstraţi că există $c\in(0,1)$, astfel încât $f''(c)=0$.

Gazeta Matematică

Problema 2. a) Fie $(G,\cdot)$ un grup, iar $f:G\longrightarrow G$ un endomorfism al său. Arătaţi că mulţimea $F_f=\{x\in G\,|\,f(x)=x\}$ a punctelor fixe ale endomorfismului f este un subgrup al grupului G.
b) Fie $n\in\mathbb{N}$, cu $n\geq 2$, iar p cel mai mic divizor prim al lui n. Demonstraţi că numărul $m=\dfrac{n}{p}+1$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea că în orice grup finit $(G,\cdot)$ de ordin n, dacă pentru un endomorfism $f:G\to G$ există un automorfism $g:G\to G$ cu proprietatea că mulţimea $A=\{a\in G\,|\,f(a)=g(a)\}$ are cel puţin m elemente, atunci f este un automorfism al grupului G.

Problema 3. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru e, iar H un subgrup al său cu $H\neq\{e\}$ şi $H\neq G$. Dacă $(xy)^2=yx$ pentru orice $x,y\in G\setminus H$, demonstraţi că:
a) $x^2=y^3$, pentru orice $x\in G\setminus H$ şi orice $y\in H$;
b) $Z(G)=\{e\}$, unde $Z(G)=\{z\in G|\,z\cdot g=g\cdot z,\,\forall g\in G\}$ este *centrul grupului* G, format din toate elementele grupului G care comută cu orice element al grupului G.
c) H este comutativ.

Problema 4. Fie $f:[0,1]\to[0,1]$ o funcţie continuă şi bijectivă, cu proprietatea că

$$f(x)<x, \quad \text{pentru orice } x\in(0,1).$$

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $f_n=\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n\text{ funcţii}}$ şi $I_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a) Demonstraţi că pentru orice $x\in(0,1)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$.
b) Determinaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 22,5 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică

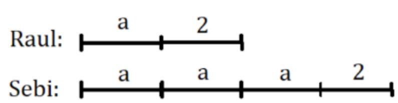
Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026

CLASA a V-a – soluții

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Sebi și Raul au mers împreună la pescuit. Fiecare dintre ei a eliberat doi pești dintre cei pe care i-a prins și i-a păstrat pe restul. Sebi a prins două treimi din numărul total de pești prinși, iar Raul a păstrat un sfert din numărul total de pești păstrați. Câți pești a prins fiecare copil?

Soluția 1. Vom folosi metoda figurativă. Reprezentăm cu un segment a numărul peștilor păstrați de Raul. Cum aceștia sunt un sfert din peștii păstrați, rezultă că Sebi a păstrat de 3 ori mai mulți, adică 3 segmente **4, 5p**



Deci Raul a prins a pești și încă 2, iar Sebi a prins $3 \cdot a$ pești și încă 2. Pe de altă parte, Sebi a prins două treimi din numărul de pești prinși, iar Raul o treime, deci Sebi a prins de două ori mai mulți pești decât Raul. **6p**

Din reprezentarea grafică rezultă că $a + a = a + 2$, așadar $a = 2$ **6p**

În concluzie, Raul a prins $2 + 2 = 4$ pești, iar Sebi a prins $4 \cdot 2 = 8$ pești **6p**

Soluția 2. Notăm cu a numărul peștilor păstrați de Raul.
Atunci Raul a prins $a + 2$ pești. **4,5p**
Cum Raul are un sfert din numărul de pești păstrați, rezultă că Sebi a păstrat $3a$ pești. **3p**
Sebi a prins două treimi din numărul de pești prinși, adică $2a + 4$ pești **3p**
Obținem $3a + 2 = 2a + 4$, de unde $a = 2$ **6p**
În concluzie, Raul a prins $2 + 2 = 4$ pești, iar Sebi a prins $4 \cdot 2 = 8$ pești **6p**

Problema 2. Câtul împărțirii numărului 2024 la $\overline{ab}$ este $\overline{abb}$. Aflați restul acestei împărțiri.

Gazeta Matematică

Soluție. $2024 = \overline{ab} \cdot \overline{abb} + r$, unde $r < \overline{ab}$ **4, 5p**

Pentru $\overline{ab} \geq 15$, obținem $2024 \geq \overline{ab}^2 \cdot 10 \geq 15^2 \cdot 10 = 2250$, nu se poate. Așadar $\overline{ab}$ poate fi 10, 11, 12, 13 sau 14 .... **3p**

Analizând fiecare din cele 5 situații în parte, obținem $\overline{ab} = 14$ și $2024 = 14 \cdot 144 + 8$, deci restul căutat este 8 .... **15p**

Observație. Pentru fiecare situație analizată se acordă câte 3 puncte.

Problema 3. Pentru fiecare număr natural m notăm suma cifrelor sale cu $s(m)$.

a) Arătați că nu există niciun număr natural n de 3 cifre pentru care $s(n)$ și $s(n+4)$ sunt multipli de 6.

b) Determinați numerele naturale p de 3 cifre pentru care $s(p)$ și $s(p+4)$ sunt multipli de 7.

Soluție. a) Fie $n = \overline{abc}$ astfel încât $a+b+c = M_6$. Efectuăm o analiză pe cazuri pentru a arăta că, în niciunul dintre cazuri, $s(n+4)$ nu poate fi multiplu de 6:

(i) dacă $c \leq 5$, atunci $s(n+4) = s(n) + 4 = M_6 + 4$, deci $s(n+4) \neq M_6$ **3p**

(ii) dacă $c \geq 6$ și $b < 9$, atunci $s(n+4) = a+b+1+c-6 = M_6 + 1$, deci $s(n+4) \neq M_6$ .. **3p**

(iii) dacă $c \geq 6, b = 9, a < 9$, atunci $s(n+4) = (a+1) + (b-9) + (c-6) = M_6 + 4 \neq M_6$ .. **3p**

(iv) dacă $c \geq 6, a = b = 9$, cum $s(n) \,\vdots\, 6$ rezultă că $n = 996$, deci $n + 4 = 1000 \neq M_6$ **1,5p**

b) Fie $p = \overline{abc}$ astfel încât $a+b+c = M_7$. Analizăm cazurile:

(i) dacă $c < 6$, atunci $s(p+4) = s(p) + 4 = M_7 + 4 \neq M_7$ **3p**

(ii) dacă $c \geq 6$ și $b < 9$, atunci $s(p+4) = a+b+1+c-6 = M_7 + 2 \neq M_7$ **3p**

(iii) dacă $c \geq 6, b = 9$ și $a < 9$, atunci $s(p+4) = a+1+b-9+c-6 = s(p) - 14 = M_7$ pentru orice p cu $s(p) = M_7$, de unde obținem că p poate fi 399, 498, 597 sau 696 .... **3p**

(iv) dacă $c \geq 6, a = b = 9$, atunci p poate lua valorile 699, 799, 899 sau 999, însă niciunul dintre aceste numere nu are proprietatea că $s(p) = M_7$ **3p**

Problema 4. Se consideră un tabel cu 4 linii și 4 coloane pe care îl completăm cu numerele de la 1 la 13 astfel încât pe prima linie să apară același număr în fiecare pătrățică, iar pe ultimele trei linii celelalte 12 numere.

a) Determinați valorile numărului de pe prima linie astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie a tabelului să fie aceeași. Pentru fiecare valoare găsită construiți un tabel corespunzător.

b) Determinați valorile numărului de pe prima linie astfel încât suma numerelor de pe fiecare coloană a tabelului să fie aceeași. Pentru fiecare valoare găsită construiți un tabel corespunzător.

Soluție. a) Notăm numărul scris pe prima linie cu x. Atunci suma numerelor de pe prima linie este egală cu $4 \cdot x$, iar suma numerelor scrise în toate cele 16 pătrățele va fi egală cu $1 + 2 + \ldots + 13 + 3x$. Obținem egalitatea $16 \cdot x = 91 + 3 \cdot x$, de unde rezultă că $x = 7$.... **4,5p**

Un exemplu de tabel este:

7	7	7	7
13	1	4	10
5	8	6	9
3	12	11	2

.... **6p**

b) Notăm cu S suma numerelor de pe fiecare coloană a tabelului. Atunci $91 + 3 \cdot x = 4 \cdot S$, de unde obținem că x poate fi egal cu $3, 7$ sau 11... **3p**

3	3	3	3
13	12	11	10
8	6	9	7
1	4	2	5

7	7	7	7
13	12	11	10
5	8	6	9
3	1	4	2

11	11	11	11
13	12	10	9
6	5	8	7
1	3	2	4

Pentru fiecare exemplu corect de tabel se acordă câte 3 puncte **9p**

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026

CLASA a VI-a – soluții

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Considerăm mulțimile:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 1000 \text{ și } n \text{ dă restul 2 la împărțirea cu } 3\},$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant 1000 \text{ și } n \text{ dă restul 1 la împărțirea cu } 7\}.$$

a) Care este cel mai mic element al mulțimii $A \cap B$?

b) Aflați numărul elementelor mulțimii $A \cup B$.

Soluție. a) $A = \{2, 5, 8, \ldots\}$ și $B = \{1, 8, 15, \ldots\}$, deci numărul cerut este $m = 8$ **4,5p**

b) Elementele mulțimii A sunt de forma $n = 3m+2$, cu $m \in \mathbb{N}$. Din condiția $3m+2 \leqslant 1000$, obținem $m \leqslant 332$, deci m ia valorile $0, 1, 2, \ldots, 332$. Rezultă că A are 333 de elemente **3p**

Elementele mulțimii B sunt de forma $n = 7p + 1$, cu $p \in \mathbb{N}$. Din condiția $7p + 1 \leqslant 1000$, obținem $p \leqslant 142$, deci p ia valorile $0, 1, 2, \ldots, 142$. Rezultă card $B = 143$ **3p**

Dacă $x \in A \cap B$, atunci $x \leqslant 1000$ și $x - 8$ este divizibil cu 3 și cu 7, deci cu 21 .... **3p**

Reciproc, dacă $21 \mid x - 8$ și $x \leqslant 1000$, atunci $x - 8$ este divizibil cu 3 și cu 7, deci x dă la împărțirea cu 3 și cu 7 aceleași resturi ca 8, așadar $x \in A \cap B$ **3p**

Reiese că $x = 21k + 8 \leqslant 1000$, $k \in \mathbb{N}$, deci $0 \leqslant k \leq 47$, iar $A \cap B$ are 48 de elemente **3p**

Numărul elementelor mulțimii $A \cup B$ se obține adunând numărul elementelor mulțimii A cu numărul elementelor mulțimii B și scăzând numărul elementelor comune. Rezultă că $A \cup B$ are 428 de elemente **3p**

Problema 2. Determinați numărul natural prim x și numărul natural nenul y având proprietatea $\dfrac{x}{2y} = \dfrac{x+1}{x+y+8}$.

Soluție. Relația din enunț se scrie sub forma $x\,(x + y + 8) = 2y(x + 1)$, $(*)$ **1,5p**

Rezultă că x divide produsul $2 \cdot y \cdot (x + 1)$. Cum numărul x este prim, înseamnă că x divide 2, x divide y sau x divide $x + 1$ **3p**

În primul caz obținem $x = 2$ și $y = 5$ **6p**

În al doilea caz, fie $y = dx$, unde d este un număr natural nenul. Înlocuind în $(*)$, deducem după calcule că $x + 8 = d\,(x + 2)$. Este evident că nu putem avea $d = 1$ **3p**

Atunci $x + 8 \geq 2\,(x + 2)$, prin urmare $x \leq 4$. Cum x este prim, înseamnă că $x \in \{2, 3\}$. Dacă $x = 2$, atunci $d = \dfrac{5}{2} \notin \mathbb{N}$. Dacă $x = 3$, atunci $d = \dfrac{11}{5} \notin \mathbb{N}$. Așadar, nu obținem soluții în acest caz **3p**

În cel de-al treilea caz, din $x \mid x + 1$ rezultă că $x \mid (x + 1) - x$, așadar $x \mid 1$. Cum x este prim, nu obținem soluții nici în acest caz **6p**

Soluție alternativă. Relația din enunț se scrie sub forma $x^2 + 8x = y(x + 2)$ **4,5p**

Rezultă că $x + 2$ divide $x^2 + 8x$, prin urmare $x + 2$ divide $\left(x^2 + 8x\right) - x\,(x + 2) = 6x$ ... **6p**

În continuare, $x + 2$ divide $6(x + 2) - 6x = 12$ **6p**

Cum x este număr natural prim, singura valoare admisibilă este $x = 2$ **3p**

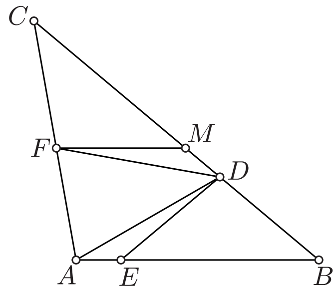
Pentru $x = 2$, din relația $x^2 + 8x = y\,(x + 2)$ obținem $y = 5$ **3p**

Notă. Perechile (x, y) de numere naturale (cu y nenul) având proprietatea din enunț sunt $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(4, 8)$ și $(10, 15)$.

Problema 3. Triunghiul ABC este isoscel și are $\angle BAC = 100°$. Cercul de centru C și rază CA taie segmentul BC în D, cercul de centru D și rază DB taie segmentul AB în punctul interior E și cercul de centru D și rază DA taie segmentul AC în punctul interior F.

a) Arătați că $CF = DE$.

b) Paralela prin punctul F la dreapta AB taie latura BC în M. Arătați că $MD = AE$.



Soluție. a) Arătăm că $\triangle BDA \equiv \triangle CFD$, (1) **1,5p**

În triunghiul ABC avem $\angle ABC = \angle ACB = 40°$ **3p**

În triunghiul isoscel CAD avem $\angle CAD = \angle CDA = \dfrac{180° - \angle ACD}{2} = 70°$ **3p**

Reiese $\angle DAB = \angle CAB - \angle CAD = 30°$, $\angle ADB = 180° - \angle DAB - \angle DBA = 110°$, $\angle CFD = 180° - \angle AFD = 110°$. **3p**

Astfel $DA = DF$, $\angle BDA = \angle CFD$ și $\angle ABD = \angle FCD$ deci, conform cazului de congruență LUU, afirmația (1) este demonstrată **3p**

b) Din $FM \parallel AB$ rezultă $\angle CFM = \angle CAB = 100°$. Astfel $\angle DFM = \angle DFC - \angle MFC = 10°$ **3p**

În triunghiul isoscel DEB avem $\angle DEB = \angle DBA = 40°$, de unde $\angle EDB = 100°$, deci $\angle ADE = \angle ADB - \angle EDB = 10°$ **3p**

Deoarece $\angle MFD = \angle EDA$, $FD = DA$ și, din congruența (1), $\angle MDF = \angle EAD$, obținem $\triangle MFD \equiv \triangle EDA$ (ULU), de unde $MD = AE$ **3p**

Problema 4. Vom numi *lente* numerele naturale nenule L care au cel puțin patru divizori și, dacă $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_p = L$ sunt divizorii lui L, atunci fiecare număr din șirul divizorilor, începând cu al patrulea, este mai mic sau egal decât suma a trei dintre divizorii precedenți.

a) Arătați că 72 este un număr lent.

b) Demonstrați că produsul oricăror două numere lente este tot un număr lent.

Soluție. a) Divizorii lui 72 sunt $1 < 2 < 3 < 4 < 6 < 8 < 9 < 12 < 18 < 24 < 36 < 72$, iar $4 < 1 + 2 + 3$, $6 < 2 + 3 + 4$, $8 < 3 + 4 + 6$, etc **4,5p**

b) Fie M și N două numere lente. Atunci orice divizor al lui MN este de forma mn, unde $m \mid M$ și $n \mid N$ **3p**

Dacă m nu este unul dintre cei mai mici trei divizori ai lui M, atunci $m \leqslant m_1 + m_2 + m_3$, unde $m_1 < m_2 < m_3 < m$ sunt divizori ai lui M. Reiese $mn \leqslant m_1n + m_2n + m_3n$, iar $m_1n < m_2n < m_3n < mn$ sunt divizori ai lui MN. Analog, dacă n nu este unul dintre cei mai mici trei divizori ai lui N. Astfel, în acest caz, mn este mai mic sau egal decât suma a trei divizori ai numărului MN care îl preced **6p**

Pentru cazurile rămase, observăm că un număr lent L este divizibil cu 6. În caz contrar, dacă $2 \nmid L$, atunci divizorii precedenți lui L sunt cel mult $\dfrac{L}{3}$, $\dfrac{L}{5}$, $\dfrac{L}{7}$, deci au suma cel mult $L\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}\right) < L$, iar dacă $3 \nmid L$, atunci divizorii precedenți lui L sunt cel mult $\dfrac{L}{2}$, $\dfrac{L}{4}$, $\dfrac{L}{5}$, deci au suma cel mult $L\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}\right) < L$ **6p**

Rezultă că rămân de analizat cazurile $m, n \in \{1, 2, 3\}$, deci $mn \in \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$. Dacă $mn \leqslant 3$ atunci mn este unul dintre primii trei termeni ai șirului divizorilor, dacă $mn \in \{4, 6\}$ atunci $mn \leqslant 1 + 2 + 3$, iar dacă $mn = 9$, atunci $mn \leqslant 2 + 3 + 6$ **3p**

Ministerul Educației și Cercetării

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a VII-a – soluţii

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Determinaţi numerele reale x pentru care $\{x\} - \{2026 \cdot x\} = x$.
(*Notația* $\{a\}$ *reprezintă partea fracționară a numărului real* a.)

Soluţie. Știm că $x = [x] + \{x\}$ **1,5p**

Ecuaţia dată se reduce la $-\{2026x\} = [x]$. Dar $0 \le \{2026x\} < 1$, deci $-1 < -\{2026x\} \le 0$, pe când $[x] \in \mathbb{Z}$ **6p**

Deducem că soluţiile ecuaţiei date sunt numerele reale care verifică egalitățile $[x] = 0$ şi $\{2026x\} = 0$ **3p**

De aici reiese că, pe de-o parte $2026x \in \mathbb{Z}$, pe de altă parte $0 \le x < 1$. **6p**

Atunci $2026x = k \in \mathbb{Z}$ implică $x = \dfrac{k}{2026}$, $k \in \mathbb{Z}$, iar $0 \le x < 1$ revine la $0 \le \dfrac{k}{2026} < 1$, deci la $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2025\}$. Conchidem că mulţimea soluţiilor este $\left\{0, \dfrac{1}{2026}, \dfrac{2}{2026}, \ldots, \dfrac{2025}{2026}\right\}$ **6p**

Problema 2. a) Arătaţi că există numere naturale nenule a şi b pentru care $\sqrt{a^2 + 2026 \cdot b^2}$ este număr raţional.

b) Care este cel mai mic număr natural nenul b pentru care există un număr natural a astfel ca $\sqrt{a^2 + 2026 \cdot b^2}$ să fie număr raţional?

Gazeta Matematică

Soluţie. a) Un exemplu de pereche (a, b) de numere naturale nenule care îndeplineşte condiţiile din enunţ este $(2025, 2)$. Într-adevăr, $2025^2 + 2026 \cdot 2^2 = 2025^2 + 4 \cdot 2025 + 4 = (2025 + 2)^2 = 2027^2$, deci $\sqrt{2025^2 + 2026 \cdot 2^2} = 2027 \in \mathbb{Q}$. **6p**

b) Vom arăta că $b = 2$ este numărul cerut **3p**

Aşa cum am văzut, pentru $b = 2$ există un a convenabil, şi anume $a = 2025$. **3p**

Rămâne să mai arătăm că pentru $b = 1$ nu există un a convenabil.

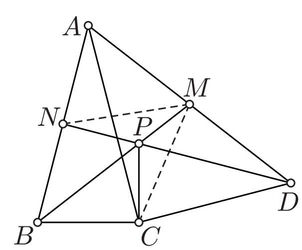
Condiţia ca $\sqrt{a^2 + 2026b^2}$ să fie număr raţional este echivalentă cu $a^2 + 2026b^2$ să fie pătrat perfect. **1,5p**

Presupunând că ar exista $c \in \mathbb{N}$ pentru care $a^2 + 2026 = c^2$, ar trebui ca a şi c să fie de aceeaşi paritate. Dar în acest caz $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$ ar fi multiplu de 4, în vreme ce 2026 nu este multiplu de 4. Contradicţia obţinută arată că pentru $b = 1$ nu există un a convenabil, deci cel mai mic număr b cu proprietatea din enunţ este $b = 2$. **9p**

Problema 3. Considerăm triunghiul ABC cu $AB = AC = 2 \cdot BC$. Perpendiculara dusă în punctul C pe dreapta AC intersectează mediatoarea segmentului AB în punctul D. Fie M mijlocul segmentului AD, N mijlocul segmentului AB și P intersecția dreptelor BM și DN.

a) Demonstrați că $PC \perp CB$.

b) Demonstrați că $DC = 2 \cdot PC$.



Soluţie. a) Ne propunem să arătăm că $\triangle BPN \equiv \triangle BPC$ **1,5p**

Pentru aceasta observăm că $CM = \frac{1}{2}AD = NM$, ca mediane în triunghiurile dreptunghice ACD și AND. Rezultă astfel $\triangle BNM \equiv BCM$ (LLL), deci $\angle NBM = \angle CBM$ **6p**

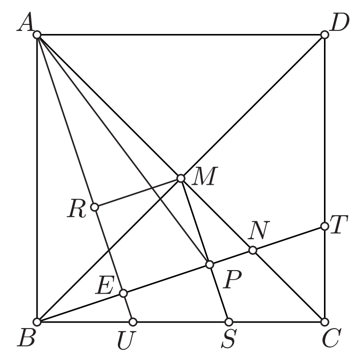
Deducem $\triangle BPN = \triangle BPC$ (LUL), deci $\angle PCB = \angle PNB = 90°$ **6p**

b) Arătăm că $\triangle DCP \sim \triangle ACB$, (1), ceea ce implică $\dfrac{DC}{CP} = \dfrac{AC}{CB} = 2$ **3p**

Avem $\angle PCD = 90° - \angle PCA = \angle ACB$ și $\angle DPC = 180° - \angle NPC = 180° - (360° - \angle PNB - \angle PCB - \angle NBC) = \angle NBC$, ceea ce dovedește relația (1) **6p**

Problema 4. Considerăm un triunghi dreptunghic isoscel ABC și notăm cu M mijlocul ipotenuzei AC, cu N mijlocul segmentului CM, cu P piciorul perpendicularei din M pe BN, cu E piciorul perpendicularei din A pe BN și cu R piciorul perpendicularei din M pe AE.

Arătați că R este centrul de greutate al triunghiului ABP.



Soluţie. Avem $AC = 2 \cdot AM = 4 \cdot CN$ **1,5p**

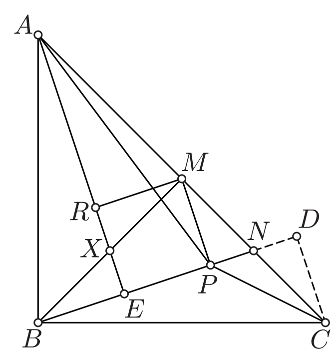
Deoarece $MR \parallel BN$, avem $\dfrac{AR}{AE} = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{2}{3}$ **3p**

Astfel, pentru a obține concluzia, este suficient să arătăm că AE este mediană în triunghiul ABP. Cum $AE \perp BN$, proprietatea precedentă se reduce la a dovedi că E este mijlocul segmentului BP **3p**

Construim pătratul $ABCD$ și considerăm punctele $U = AE \cap BC$, $T = BN \cap CD$. Atunci $\triangle TNC \sim \triangle BNA$ (TFA), deci $\dfrac{AB}{CT} = \dfrac{AN}{NC} = 3$. Apoi $\angle BAU = 90° - \angle TBA = \angle TBC$ și obținem $\triangle BAU \equiv \triangle CBT$ (CU), de unde $BC = 3BU$, (1) .. **6p**

Din $AU \parallel MS$ și $AC = 2AM$ reiese că MS este linie mijlocie în triunghiul CAU, de unde $CS = SU$ **6p**

Folosind (1) reiese că $BU = US = SC$, ceea ce arată că EU este linie mijlocie în triunghiul BSP, deci E este mijlocul segmentului BP **3p**



Altă soluție. Ca mai sus, este suficient să arătăm că E este mijlocul segmentului BP .... **1,5 + 3 + 3p**

Construim $CD \perp BN$, $D \in BN$. Atunci $\angle ABE = 90° - \angle DBC = \angle BCD$, deci $\triangle ABE \equiv \triangle BCD$ (IU), de unde reiese $BE = CD$ **6p**

Apoi $\triangle MPN \equiv \triangle CDN$ (IU), deci $CD = MP$ **3p**

Avem $\angle MBP = 90° - \angle BMP = \angle PMN$, de unde reiese $\triangle BMP \sim \triangle MNP$ **3p**

Obținem $\dfrac{BP}{MP} = \dfrac{BM}{MN} = \dfrac{MC}{MN} = 2$, de unde $BP = 2MP = 2CD = 2BE$, deci E este mijlocul segmentului BP **3p**

Altă soluție. Ca mai sus, arătăm că E este mijlocul segmentului BP .... **1,5 + 3 + 3p**

Fie X mijlocul segmentului BM. Atunci $AB = BC$, $BX = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{1}{2}CM = CN$ și $\angle ABX = 45° = \angle BCN$, deci $\triangle AXB \equiv \triangle BNC$ (LUL) **6p**

Rezultă $\angle ABE + \angle BAX = \angle ABE + \angle CBN = 90°$, deci $AX \perp BP$, ceea ce arată că punctul X se află pe AE. Cum X este mijlocul segmentului BM și $XE \parallel MP$, reiese că XE este linie mijlocie în triunghiul BPM, deci E este mijlocul segmentului BP **9p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026

CLASA a VIII-a – soluții

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. a) Determinați numerele reale x pentru care numerele $x+\sqrt{3}$ și $3x^2+\sqrt{3}$ sunt raționale.

b) Arătați că nu există niciun număr real y astfel încât numerele $y+\sqrt{3}$ și $3y^2+y^3+\sqrt{3}$ să fie raționale.

Soluție. a) Din $x+\sqrt{3}=a\in\mathbb{Q}$ rezultă $x=a-\sqrt{3}$ și astfel $3x^2+\sqrt{3}=3(a-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}=3a^2+9+\sqrt{3}\cdot(1-6a)$ **3p**

Numărul $3x^2+\sqrt{3}$ este rațional dacă și numai dacă $1-6a=0$, adică $a=\frac{1}{6}\in\mathbb{Q}$. **3p**

Există, așadar, un singur număr real care verifică enunțul, anume $x=\frac{1}{6}-\sqrt{3}$......... **1,5p**

b) Presupunem că există $y\in\mathbb{R}$ cu $y+\sqrt{3}=a\in\mathbb{Q}$ și $3y^2+y^3+\sqrt{3}=b\in\mathbb{Q}$. **3p**

Deducem că $y=a-\sqrt{3}$ și astfel $b=3(a-\sqrt{3})^2+(a-\sqrt{3})^3+\sqrt{3}=3a^2+9+\sqrt{3}\cdot(1-6a)+a^3-3a^2\sqrt{3}+9a-3\sqrt{3}=\underbrace{a^3+3a^2+9a+9}_{\in\mathbb{Q}}+\sqrt{3}\cdot\left(-3a^2-6a-2\right)\in\mathbb{Q}$. **6p**

Rezultă $3a^2+6a+2=0$, de unde $a=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}\notin\mathbb{Q}$, deci presupunerea este falsă. **6p**

Problema 2. Arătați că numărul $\sqrt{(\overline{xxx}-y)^2+(\overline{yyy}-x)^2}$ este irațional, oricare ar fi cifrele distincte nenule x și y.

Gazeta Matematică

Soluție. Notăm $A=(\overline{xxx}-y)^2+(\overline{yyy}-x)^2$. Arătăm că A nu este pătrat perfect.

La împărțirea unui pătrat perfect la 11 se poate obține restul 0, 1, 3, 4, 5 sau 9, $(*)$ **6p**

Avem $(\overline{xxx}-y)^2=(111x-y)^2=(110x+x-y)^2=(M_{11}+x-y)^2=M_{11}+(x-y)^2$ **3p**

Analog, $(\overline{yyy}-x)^2=M_{11}+(y-x)^2$, deci $A=(\overline{xxx}-y)^2+(\overline{yyy}-x)^2=M_{11}+2(x-y)^2$ **3p**

Din $(*)$ rezultă că $A\in\{M_{11},M_{11}+2,M_{11}+6,M_{11}+7,M_{11}+8,M_{11}+10\}$ **6p**

Cum $x\neq y$, rezultă că $A\neq M_{11}$, deci prin împărțirea lui A la 11 se pot obține doar resturile 2, 6, 7, 8 sau 10, iar din $(*)$ rezultă că A nu este pătrat perfect **3p**

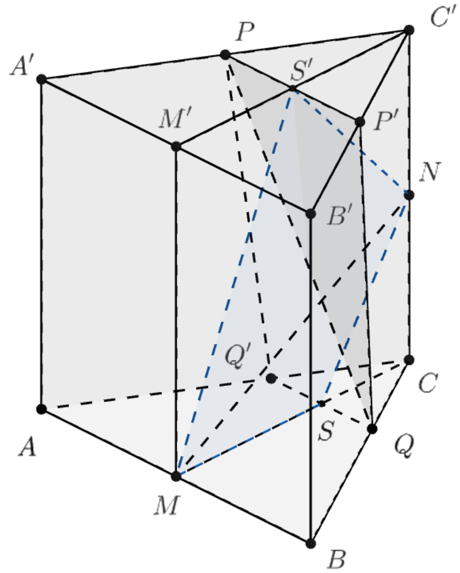
Ca urmare, $\sqrt{A}=\sqrt{(\overline{xxx}-y)^2+(\overline{yyy}-x)^2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$................................ **1,5p**

Problema 3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, M, N, P mijloacele muchiilor AB, CC', respectiv $A'C'$ și punctul Q pe muchia BC, astfel încât $AB=18$ cm, $AA'=3\sqrt{3}$ cm și $BQ=10$ cm.

a) Arătați că $AB\perp(CMC')$.

b) Arătați că dreptele MN și PQ sunt perpendiculare.

Soluție. a) Cum triunghiul ABC este echilateral și M este mijlocul lui AB, obținem $CM \perp AB$. Din $C'C \perp (ABC)$, $AB \subset (ABC)$, deducem $C'C \perp AB$ și cum CM, CC' sunt drepte concurente din planul (CMC'), deducem $AB \perp (CMC')$. **6p**



b) Fie P' mijlocul lui $B'C'$, M' mijlocul lui $A'B'$, $C'M' \cap PP' = \{S'\}$, $QQ' \parallel AB$, Q' pe muchia AC și $CM \cap QQ' = \{S\}$.

Cum $PQ \subset (QP'P)$, este suficient să arătăm că $MN \perp (QP'P)$. Din $AB \perp (CMC')$, avem $AB \perp NM$ și cum $QQ' \parallel AB$, obținem $MN \perp QQ'$. **3p**

Vom arăta că $SS' \perp MN$ și pentru aceasta, că patrulaterul $MSNS'$ este ortodiagonal. Cum $NC' = NC$ și $S'C' = M'S'$, avem: $MS^2 + S'N^2 = SN^2 + MS'^2 \Leftrightarrow MS^2 + S'C'^2 + C'N^2 = SC^2 + NC^2 + MM'^2 + M'S'^2 \Leftrightarrow MS^2 = SC^2 + MM'^2$. **6p**

Dar $CM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ cm și $\dfrac{MS}{CM} = \dfrac{BQ}{BC} \Rightarrow \dfrac{MS}{9\sqrt{3}} = \dfrac{10}{18} \Rightarrow MS = 5\sqrt{3}$ cm, de unde $SC = 4\sqrt{3}$ cm și cum $MM' = 3\sqrt{3}$ cm, avem $MS^2 = SC^2 + MM'^2 \Leftrightarrow (5\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2$, relație adevărată. Obținem, astfel, că patrulaterul $MSNS'$ este ortodiagonal, deci $MN \perp SS'$ și cum $MN \perp QQ'$, rezultă $MN \perp (PP'Q)$ **6p**

Așadar, $MN \perp PQ$. **1,5p**

Problema 4. Un cub cu latura de lungime $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, este împărțit în 297 de cuburi, dintre care unul are latura de lungime x, $x \neq 1$, și restul au latura de lungime 1.

a) Arătați că $\ell \in \mathbb{N}$.

b) Determinați valoarea numărului ℓ.

Soluție. a) Cuburile în care este împărțit cubul cu latura ℓ au fețele paralele cu fețele acestuia.

Fie d o dreaptă care intersectează cubul mare, paralelă cu o muchie a cubului, care nu intersectează cubul de latură x, atunci d va intersecta cubul mare după un segment $MN = \ell$ și $a, a \in \mathbb{N}^*$, cuburi de latură 1 , deci $\ell = a \cdot 1 \in \mathbb{N}^*$. **6p**

b) Considerând o dreaptă d' paralelă cu o muchie a cubului mare, care intersectează cubul de latură x, atunci $\ell = x + k \cdot 1, k \in \mathbb{N}$ și de aici $x \in \mathbb{N}^*$. **3p**

Egalând volumele, obținem $\ell^3 = x^3 + 296 \Leftrightarrow (\ell - x)\left(\ell^2 + \ell \cdot x + x^2\right) = 2^3 \cdot 37$, unde $\ell, x \in \mathbb{N}^*, x \neq 1$. **3p**

Pentru $x = 2$, obținem $\ell^3 = 304$, care nu are soluții naturale, deoarece $6^3 = 216 < 304 < 343 = 7^3$, deci $x \geq 3$. Dacă $\ell - x \geq 4 \Rightarrow 296 = \ell^3 - x^3 \geq (x+4)^3 - x^3 = 12x^2 + 48x + 64 > 296$ pentru $x \geq 3$, deci nu avem soluție. **3p**

Deci $\ell - x \mid 2^3 \cdot 37$ și $\ell - x \leq 3 \Rightarrow \ell - x \in \{1, 2\}$. Dacă $\ell - x = 1 \Rightarrow (x+1)^3 = x^3 + 296 \Rightarrow 3x^2 + 3x = 295$ care nu are soluții în $\mathbb{N}$. **3p**

Dacă $\ell - x = 2 \Rightarrow (x+2)^3 = x^3 + 296 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x = 288 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 48 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 49$, deci $x = 6$, de unde $\ell = 8$. **4,5p**

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a IX-a – soluţii

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Considerăm numerele reale a, b, c şi ecuaţiile $x^2 + 4ax + (b+c)^2 = 0$, $x^2 + 4bx + (c+a)^2 = 0$, respectiv $x^2 + 4cx + (a+b)^2 = 0$.

a) Arătaţi că cel puţin una dintre cele trei ecuaţii are soluţii reale.

b) Demonstraţi că dacă ecuaţiile admit o soluţie reală comună atunci $a = b = c$..

Soluţie. a) Presupunem prin absurd ca toate cele trei ecuaţii nu au solutii reale. Atunci toţi cei trei discriminanţi sunt negativi,

$$16a^2 - 4(b+c)^2 < 0,\ 16b^2 - 4(c+a)^2 < 0,\ 16c^2 - 4(a+b)^2 < 0.$$

.... **1,5p**

Prin simplificare cu 4 si adunarea celor trei inegalitati deducem

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - (b+c)^2 - (c+a)^2 - (a+b)^2 < 0$$

.... **3p**

Astfel

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - (b^2 + 2bc + c^2) - (c^2 + 2ca + a^2) - (a^2 + 2ab + b^2) < 0$$

deci

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ca - 2ab < 0.$$

.... **3p**

În concluzie

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) < 0 \text{ deci } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 < 0,$$

ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar cel puţin o ecuaţie are soluţii reale. **6p**

b) Fie x_0 soluţia reală comună a celor trei ecuaţii. Prin adunarea celor trei egalităţi obţinem

$$3x_0^2 + 4(a+b+c)x_0 + 2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) = 0.$$

.... **3p**

Prin urmare ecuaţia de gradul doi corespunzătoare are discriminantul nenegativ, adică

$$16(a+b+c)^2 - 24(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \geq 0.$$

Deducem $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \leq 0$, deci fiecare pătrat este zero adică $a=b=c$.
.... **6p**

Problema 2. Fie patrulaterul convex $ABCD$, punctul O de intersecţie a diagonalelor sale şi G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ABC, respectiv ODC. Demonstraţi că O este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Gazeta Matematică

Soluţie.
Dacă O este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$ atunci $\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}=\overrightarrow{0}$.
.... **1,5p**

Cum G_1, G_2, G_3 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, ABC, respectiv ODC, folosind relaţia lui Leibniz, egalitatea de mai sus devine:

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{0},$$

prin urmare

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}.$$

.... **6p**

Vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ sunt coliniari deci există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}$. Analog există $\beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{OD}=\beta\overrightarrow{OB}$, deci obţinem:

$$(1+\alpha)\overrightarrow{OA}+(1+\beta)\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{0}.$$

.... **6p**

Deoarece $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt necoliniari, ultima egalitate este echivalentă cu $1+\alpha=1+\beta=0$, adică $\alpha=\beta=-1$, ceea ce înseamnă că O este mijlocul segmentelor AC şi BD, deci $ABCD$ este paralelogram.
.... **3p**

Reciproc, dacă $ABCD$ este paralelogram, avem: $\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC})$ şi atunci $\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{0}$, deci O este centrul de greutate al triunghiului $G_1G_2G_3$.
.... **6p**

Problema 3. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care numărul

$$4^{n-1}+n^2+11$$

este pătrat perfect.

Soluţie.
Din ipoteză rezultă că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k^2=4^{n-1}+n^2+11>4^{n-1}$.

. . . . **1,5p**

Prin urmare, $k > 2^{n-1}$. **3p**

Atunci $k \geq 2^{n-1} + 1$, deci $4^{n-1} + n^2 + 11 \geq (2^{n-1} + 1)^2$, de unde rezultă că $n^2 + 10 \geq 2^n$.
. . . . **6p**

Pe de altă parte, prin inducţie matematică se demonstrează imediat că $2^n > n^2+10, \forall n \geq 6$. Într-adevăr, $2^6 > 6^2 + 10$ şi presupunând că $2^n > n^2 + 10$ pentru un număr natural oarecare $n \geq 6$, avem $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2(n^2 + 10) > (n + 1)^2 + 10$.
. . . . **6p**

Prin urmare, din $n^2 + 10 \geq 2^n$ rezultă că $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. **3p**

În final, observăm că singurul număr care verifică ipoteza este $n = 3$. **3p**

Problema 4. Determinaţi şirurile $(a_n)_{n\geq1}$ de numere naturale nenule care verifică simultan următoarele două condiţii:

$$(1)\ i + j \text{ divide } a_i + a_j;$$
$$(2)\ a_i + a_j \text{ divide } (i + j)^2,$$

pentru orice i, j numere naturale nenule.

Soluţie. Vom arăta că $a_i = i$ pentru orice $i \geq 1$. Evident, acest şir satisface ipoteza.
. . . . **1,5p**

Pentru $i = j$ în relaţiile din enunţ obţinem $i \mid a_i \mid 2i^2$ **(*)** pentru orice $i \geq 1$. Pentru $i = 1$ deducem $a_1 \in \{1, 2\}$. **3p**

Pentru $i = 2$ avem $a_2 \in \{2, 4, 8\}$. Pentru $i = 1,\ j = 2$ obţinem $3|a_1 + a_2|9$. Singurele posibilităţi sunt $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ sau $a_1 = 1,\ a_2 = 8$. În ambele cazuri, $a_1 = 1$. **3p**

Din **(*)** obţinem $3|a_3|18$ deci $a_3 \in \{3, 6, 9, 18\}$ iar din enunţ pentru $i = 2$ şi $j = 3$ deducem $5|a_2 + a_3|25$. Dacă $a_2 = 8$ atunci 5 nu divide $a_2 + a_3$, deci $a_2 = 2$. **3p**

Fie acum $i \geq 3$. Din **(*)** deducem că există un şir $(b_n)_{n\geq1}$ de numere naturale nenule cu $a_i = ib_i$ şi $b_i|2i$ pentru orice $i \geq 3$. Pentru $j = 1$ în relaţiile din enunţ avem $i+1|ib_i+1|(i+1)^2$. Dar $i + 1|ib_i + b_i$ şi prin scădere, $i + 1|b_i - 1$. **6p**

Dacă prin absurd $b_i > 1$, din relaţia de mai sus obţinem $b_i-1 \geq i+1 \iff b_i \geq i+2$, dar cum $b_i|2i$, deducem $b_i = 2i$. De aici avem $1+2i^2|(1+i)^2$, deci $1+2i+i^2 \geq 1+2i^2 \iff 2i \geq i^2 \iff 2 \geq i$ ceea ce constituie o contradicţie pentru $i \geq 3$.
În concluzie $b_i = 1$ deci $a_i = i$ pentru orice $i \geq 1$. **6p**

Observaţie. Condiţia (1) din ipoteză nu este necesară. Se poate arăta prin inducţie că $a_i = i$ pentru orice $i \geq 1$ folosind doar condiţia (2) şi Postulatul lui Bertrand.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a X-a – soluţii

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Se consideră numerele reale $a, b, x, y > 0$, cu $ab \neq 1$, şi c un număr natural nenul astfel încât

$$\log_a \sqrt{x} = \log_b \sqrt{cx + y} = \log_{ab} y.$$

a) Arătaţi că dacă $c = 1$, atunci numărul $\dfrac{y}{x}$ este iraţional.

b) Demonstrați că numărul $\dfrac{y}{x}$ este rațional dacă şi numai dacă c este produsul a două numere naturale nenule consecutive.

Soluţie. Egalităţile din enunţ conduc la:

$$\frac{1}{2}\log_a x = \frac{1}{2}\log_b (cx + y) = \log_{ab} y.$$

.... **1.5p**

Fie $z = \frac{1}{2}\log_a x = \frac{1}{2}\log_b (cx + y) = \log_{ab} y$. **3p**

De aici obţinem:

$$x = a^{2z}, \quad cx + y = b^{2z}, \quad y = (ab)^z.$$

.... **3p**

De aici obţinem că $\frac{y}{x} = \left(\frac{b}{a}\right)^z$ şi $c + \frac{y}{x} = \left(\frac{b}{a}\right)^{2z}$. **3p**

Notând $t = \frac{y}{x}$, obţinem că acesta este soluţia pozitivă a ecuaţiei $t^2 - t - c = 0$.

.... **3p**

De aici obţinem că $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$. **3p**

a) Pentru $c = 1$ avem $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, care este iraţional. **3p**

b) $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{1+4c} \in \mathbb{Q}$, iar cum $c \in \mathbb{N}^*$, avem $\sqrt{1+4c} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow 1+4c = (2d+1)^2$ $\Leftrightarrow c = d(d+1)$, cu $d \in \mathbb{N}^*$. **3p**

Problema 2. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ care satisfac simultan condiţiile

(1) $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$;

(2) $\overline{f(z)} = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$;

(3) $\overline{z}\, f(z) \in (0, \infty)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$.

Soluţie: Din condiţia (1) pentru $z_1 = z_2 = 1$ obţinem $f(1) = f^2(1)$. **1.5p**
Deoarece $1 \cdot f(1) > 0$, obţinem că $f(1) = 1$. **3p**
Apoi, pentru $z_1 = z$ şi $z_2 = \frac{1}{z}$ avem $1 = f(1) = f(z)f\left(\frac{1}{z}\right)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$. **3p**
Atunci, din condiţia (2), avem $\overline{f(z)} = \frac{1}{f(z)}$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$, ... **3p**
iar din condiţia(3) avem $\overline{z}\, f(z) = z\,\overline{f(z)} = \frac{z}{f(z)}$, pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$. **3p**
Deci avem $(f(z))^2 = \frac{z}{\overline{z}} = \frac{z^2}{|z|^2}$, adică

$$f(z) \in \left\{\pm\frac{z}{|z|}\right\}, \qquad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C}^*.$$

.... **3p**

Cum $\overline{z}\, f(z) > 0$, obţinem

$$f(z) = \frac{z}{|z|}, \qquad \text{pentru orice } z \in \mathbb{C}^*,$$

.... **3p**

funcţie care verifică condiţiile date. **3p**

Notă: Lipsa verificării soluţiei sau măcar a menţionării că funcţia $f(z) = \frac{z}{|z|}$ verifică conduce la neacordarea ultimelor **3 puncte** din barem.

Problema 3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2 + 5 \cdot 6^x = 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x$.

Soluţie. Vom demonstra că soluţiile sunt $x_1 = 0$ şi $x_2 = -1$. **3p**
Rescriem ecuaţia din enunţ astfel:

$$5 \cdot (6^x - 3^x - 2^x + 1) + 2(2^x - 1) + 3^x - 1 = 0,$$

.... **1.5p**

care poate fi factorizată astfel:

$$5(3^x - 1)(2^x - 1) + 2(2^x - 1) + 3^x - 1 = 0.$$

.... **3p**

Observăm că $x_1 = 0$ este soluţie şi că pentru $x > 0$ avem

$$5(3^x - 1)(2^x - 1) + 2(2^x - 1) + 3^x - 1 > 0,$$

deci ecuaţia nu poate avea soluţii în $(0, \infty)$. **3p**

Pentru $x < 0$ putem rescrie ecuaţia sub forma:

$$5 = \frac{2}{1 - 3^x} + \frac{1}{1 - 2^x}.$$

.... **3p**

Funcţia $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{1-3^x} + \frac{1}{1-2^x}$ este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$.
.... **3p**

Deoarece funcţia f este strict crescătoare, ecuaţia admite cel mult o soluţie pe $(-\infty, 0)$.

. . . . **3p**

Deoarece $x_2 = -1$ verifică ecuaţia dată, aceasta este singura soluţie din intervalul $(-\infty, 0)$.

. . . . **3p**

Problema 4. Pentru orice mulţime finită $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ de numere complexe nenule cu $n \geq 4$ elemente definim mulţimea:

$$B(A) = \left\{ z_i z_j \;\middle|\; 1 \leq i < j \leq n \right\}.$$

Determinați mulțimile A pentru care $A = B(A)$.

Soluţie. Vom demonstra că mulțimile căutate sunt mulțimile rădăcinilor de ordinul n ale unității, i.e., $A = U_n$. **1.5p**

Fără a pierde generalitatea presupunem că $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots \leq |z_n|$.

Deoarece $z_n z_k \in A$, avem $|z_n z_k| \leq |z_n|$, adică $|z_k| \leq 1$, pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Deoarece $z_1 z_k \in A$, avem $|z_1 z_k| \geq |z_1|$, adică $|z_k| \geq 1$, pentru $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Aşadar, $|z_k| = 1$, pentru $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. **3p**

Dacă $|z_n| > 1$, atunci $|z_k z_n| > 1$, pentru orice $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, deci $z_k z_n = z_n$ (toate celelalte elemente din A având modulul cel mult 1), adică $z_k = 1$, pentru $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Dar, cum $n \geq 4$, acest lucru este imposibil, deoarece $z_i \neq z_j$ pentru $i \neq j$. Aşadar, $|z_n| = 1$.

. . . . **3p**

În mod analog, obţinem că $|z_1| = 1$, deci toate elementele din A au modulul egal cu 1.

. . . . **3p**

Fie $\theta_k = \arg(z_k)$. Fără a pierde generalitatea, presupunem că $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < 2\pi$. Problema este echivalentă acum cu: pentru orice $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, există $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $\theta_i + \theta_j = \theta_k$ modulo 2π. Avem $\theta_n \leq \theta_n + \theta_1 < 2\pi + \theta_1$, deci $\theta_n = \theta_n + \theta_1$, adică $\theta_1 = 0$, deci $1 \in A$. **3p**

În plus, $\theta_n < \theta_n + \theta_2 < 2\pi + \theta_2$, deci $\theta_n + \theta_2 = 2\pi + \theta_1 = 2\pi$, adică $\theta_n = 2\pi - \theta_2$. Apoi avem

$$\theta_3 < \theta_3 + \theta_2 < \theta_4 + \theta_2 < \cdots < \theta_n + \theta_2 = 2\pi,$$

deci avem $n-2$ argumente cuprinse între θ_3 şi 2π, deci $\theta_k + \theta_2 = \theta_{k+1}$, pentru $k \in \{3, \ldots, n-1\}$.

. . . . **3p**

Mai întâi avem $\theta_n = (n-3)\theta_2 + \theta_3$, iar din $\theta_2 + \theta_n = 2\pi$, avem $(n-2)\theta_2 + \theta_3 = 2\pi$ (1).

Pe de altă parte, $2\pi = 2\pi + \theta_1 = \theta_n + \theta_2 < \theta_n + \theta_3 < 2\pi + \theta_3$, deci $\theta_n + \theta_3 = 2\pi + \theta_2$, adică $2\theta_3 + (n-4)\theta_2 = 2\pi$ (2).

Din (1) şi (2) avem $\theta_3 = 2\theta_2$, deci $\theta_k = (k-1)\theta_2$, iar cum $\theta_2 + \theta_n = 2\pi$, avem $\theta_k = \frac{2(k-1)\pi}{n}$, $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, adică $A = U_n$. **3p**

Mai trebuie demonstrat că toate aceste mulțimi verifică egalitatea din enunț. Fie $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, elementele lui A. Pe de-o parte, produsul a două rădăcini de ordinul n ale unității este rădăcină de ordinul n a unității. Apoi avem $\varepsilon_k = \varepsilon_k \cdot \varepsilon_0$, pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, respectiv $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \varepsilon_{n-1}$, ceea ce încheie demonstrația.

. . . . **3p**

Notă 1: Pentru simpla menţionare a soluţiei $A = U_n$ se acordă **1.5 puncte**.

Notă 2: Pentru menţionarea soluţiei $A = U_n$ şi verificarea acesteia, fără alte considerente, se acordă **4.5 puncte**.

Ministerul Educației și Cercetării

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a XI-a – soluţii

Punctaj din oficiu **10p**

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă, cu proprietatea

$$\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Arătaţi că $\det(A + A^{-1}) = (\mathrm{Tr}(A))^2$, unde $\mathrm{Tr}(A)$ este suma elementelor diagonalei principale a matricei A.

Soluţie. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice cu proprietăţile din enunţ. Notăm $D = \det(A)$.
Cum matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este inversabilă, $D \in \mathbb{R}^*$. **1,5p**
Inversa matricei A este: $A^{-1} = \dfrac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ **3p**
Determinantul inversei matricei A este: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{D}$ **3p**
Prin calcul direct, sau utilizând identitatea

$$\det(X + Y) + \det(X - Y) = 2(\det(X) + \det(Y)),\ \forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

obţinem $\det(A + A^{-1}) + \det(A - A^{-1}) = 2\left(D + \dfrac{1}{D}\right)$ **9p**
Conform ipotezei, $2\left(D + \dfrac{1}{D}\right) = 4$, de unde $D = 1$. **3p**
Atunci $\det(A + A^{-1}) = \begin{vmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{vmatrix} = (a+d)^2 = \mathrm{Tr}^2(A)$. **3p**

Problema 2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu $x_1, x_2 \in (0,1)$, pentru care

$$x_{n+2} = x_n^2 \cdot x_{n+1} - x_n^2 + 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 \dots x_n = 0$.

b) Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_1 x_2 \dots x_n$.

Gazeta Matematică

Soluţie.

a) Demonstrăm prin inducţie proprietatea

$$x_n \in (0,1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

$x_1, x_2 \in (0,1)$, conform definiţiei şirului. Presupunem că, pentru un număr natural nenul n, avem $x_k \in (0,1),\ \forall k \in \{1,2,\ldots,n+1\}$. Conform relaţiei de recurenţă, $x_{n+2} = 1 - x_n^2(1-x_{n+1})$. Cum $x_n, x_{n+1} \in (0,1)$, avem $x_n^2(1-x_{n+1}) \in (0,1)$, de unde obţinem $x_{n+2} \in (0,1)$.

Astfel, proprietatea (1) este probată pe baza principiului al II-lea al inducţiei matematice. **3p**

Atunci $1 - x_{n+2} = x_n^2(1-x_{n+1}) < 1 - x_{n+1}$. Prin urmare, $x_{n+1} < x_{n+2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. **3p**

Rezultă că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$, strict crescător şi mărginit superior de 1, este convergent........ **1,5p**

Atunci şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este de asemenea convergent. Notăm $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in (0,1]$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $\ell = \ell^3 - \ell^2 + 1$. Rezultă $(\ell-1)^2(\ell+1) = 0$, de unde $\ell = 1$. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. **3p**

Din relaţia de recurenţă deducem $x_k^2 = \dfrac{1-x_{k+2}}{1-x_{k+1}},\ \forall k \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 = \frac{1-x_3}{1-x_2} \cdot \frac{1-x_4}{1-x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x_{n+2}}{1-x_{n+1}} = \frac{1-x_{n+2}}{1-x_2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-x_{n+2}}{1-x_2} = 0$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 \ldots x_n = 0$ **3p**

b) Conform (2), avem $n x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 = \dfrac{n(1-x_{n+2})}{1-x_2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru calculul limitei şirului $y_n = n(1-x_{n+2}),\ n \geq 1$, vom aplica Teorema Stolz-Cesàro. **3p**

Astfel, utilizând relaţia de recurenţă, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{1-x_{n+3}} - \frac{1}{1-x_{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x_{n+2})(1-x_{n+3})}{x_{n+3}-x_{n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-x_{n+2})(1-x_{n+3})}{(1-x_{n+2})(1+x_{n+1})(1-x_{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 x_{n+1}^2}{1+x_{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot x_1 x_2 \ldots x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-x_2)}}$ **6p**

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi toate matricele $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că, dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = M$, atunci $BA = M$.

Soluţie. Fie $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dacă matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ au proprietatea $AB = \lambda I_n$ atunci A şi B sunt inversabile, cu $A^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} B$. **1,5p**

Rezultă $\left(\dfrac{1}{\lambda} B\right) A = I_n$, deci $BA = \lambda I_n$. Prim urmare, matricele λI_n, cu $\lambda \in \mathbb{C}^*$, satisfac proprietatea din enunţ. **6p**

Presupunem că matricea $M = (m_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are proprietatea din enunţ.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă. Definim $B = A^{-1}M$. Atunci $AB = M$, deci $BA = M$. Obţinem $A^{-1}MA = M$, de unde $MA = AM$. Prin urmare, M comută cu orice matrice inversabilă. **3p**

Fie $E_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricea având elementul situat pe poziţia $(1,j)$ egal cu 1 şi iar restul elementelor egale cu 0, pentru fiecare $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Avem $\det(I_n + E_j) = \begin{cases} 2, & j = 1 \\ 1, & j \in \{2,\ldots,n\} \end{cases}$.

Rezultă că matricea I_n+E_j este inversabilă. Atunci $(I_n+E_j)M = M(I_n+E_j)$, de unde obţinem $E_jM = ME_j,\ j = 1,2,\cdots,n$. Matricea E_jM are prima linie egală cu $(m_{j1}\ m_{j2}\ \cdots\ m_{jn})$ şi restul liniilor nule, iar matricea ME_j are coloana j egală cu $\begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix}$ şi restul coloanelor nule.
Rezultă $m_{jk} = 0,\ \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\},\ \ \forall\, k \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j\}$ şi $m_{jj} = m_{11},\ \forall\, j \in \{1,2,\ldots,n\}$.
Prin urmare, M este o matrice diagonală de forma $M = \lambda I_n$, cu $\lambda \in \mathbb{C}$. **9p**
Matricea nulă (cazul $\lambda = 0$) nu satisface proprietatea din enunţ. Astfel, $E_2E_1 = O_n$. dar $E_1E_2 = E_2 \neq O_n$.

În concluzie, matricele M cu proprietatea din enunt sunt de forma λI_n, cu $\lambda \in \mathbb{C}^*$. **3p**

Problema 4. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi neconstantă. Considerăm funcţia $g : \mathrm{Im}(f) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(y) = \inf\{x \in [0,1] \mid f(x) = y\},\ \text{pentru orice } y \in \mathrm{Im}(f),$$

unde $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in [0,1]\}$. Demonstraţi că funcţia g este continuă dacă şi numai dacă există $a \in (0,1]$ astfel încât f este strict monotonă pe intervalul $[0,a]$ şi $\mathrm{Im}(f) = f([0,a])$.

Soluţie. Pentru $y \in \mathrm{Im}(f)$, mulţimea $\{x \in [0,1] \mid f(x) = y\}$ este nevidă şi mărginită, deci admite margine inferioară (infimum). În plus, există un şir $(x_n)_{n\geq 1}$, cu termenii în $[0,1]$, astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = g(y)$ şi $f(x_n) = y,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Cum f este continuă, $f(g(y)) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y$. Astfel, $f(g(y)) = y,\ \forall\, y \in \mathrm{Im}(f)$. (1) **3p**

1) Presupunem că există $a \in (0,1]$ astfel încât funcţia f este strict monotonă pe intervalul $[0,a]$ şi $\mathrm{Im}(f) = f([0,a])$.
Pe baza ipotezei şi proprietăţii lui Darboux a funcţiei continue f, obţinem $f([0,a]) = [f(0), f(a)]$, dacă f este strict crescătoare pe $[0,a]$, sau $f([0,a]) = [f(a), f(0)]$, dacă f este strict descrescătoare pe $[0,a]$. **1.5p**
Definim funcţiile $f_a : [0,a] \to f([0,a])$, cu $f_a(x) = f(x)$, pentru oricare $x \in [0,a]$, şi $g_a : f([0,a]) \to [0,a]$, $g_a(y) = g(y) \in [0,a]$, pentru oricare $y \in f([0,a]) = \mathrm{Im}(f)$. Conform (1), $(f_a \circ g_a)(y) = f(g(y)) = y$, pentru oricare $y \in f([0,a])$. Funcţia $f_a : [0,a] \to f([0,a])$ este bijectivă şi $f_a \circ g_a = \mathrm{id}_{f([0,a])}$ Rezultă $g_a = f_a^{-1}$. Atunci g_a este continuă, ca inversa funcţiei continue f_a. Deducem că g este continuă. **6p**

2) Reciproc, presupunem că funcţia g este continuă.
Întrucât f este continuă şi neconstantă pe $[0,1]$, există $\alpha, \beta \in [0,1]$, cu $f(\alpha) < f(\beta)$ astfel încât $\mathrm{Im}(f) = [f(\alpha), f(\beta)]$ (conform Teoremei lui Weierstrass şi proprietăţii lui Darboux)......... **3p**
Similar, cum g este presupusă continuă, $g(\mathrm{Im}(f)) = [b,a]$, cu $0 \leq b < a \leq 1$. (Cazul $a = b$ este exclus, deoarece f este neconstantă.) Cum $g(f(0)) = 0$, rezultă că $0 \in \mathrm{Im}(g) = [b,a]$, deci $b = 0$. Astfel, $\mathrm{Im}(g) = [0,a]$, cu $0 < a \leq 1$, iar $\mathrm{Im}(f) = f([0,a])$. **3p**
Din (1) rezultă că g este injectivă. Cum g este continuă, deducem că g este strict monotonă. Atunci funcţia $g_a : \mathrm{Im}(f) \to [0,a]$, definită prin $g_a(y) = g(y),\ \forall\, y \in \mathrm{Im}(f)$, este bijectivă. ... **3p**
Conform (1), funcţia $f_a : [0,a] \to f([0,a])$, definită prin $f_a(x) = f(x),\ \forall\, x \in [0,a]$, este inversa funcţiei g_a. Cum inversa unei funcţii strict monotone este tot o funcţie strict monotonă, funcţia f_a este strict monotonă. Rezultă că f este strict monotonă pe $[0,a]$. **3p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a XII-a – soluţii

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. *Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă, cu derivata a doua continuă pe $\mathbb{R}$, cu proprietatea că $\int_0^1 f(x)\,dx=0$ şi $\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\cdot f(x)\,dx$.*

a) Demonstraţi că dacă $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de gradul al doilea, având graficul simetric în raport cu dreapta de ecuaţie $x=\frac{1}{2}$, atunci $\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx=0$.

b) Demonstraţi că există $c\in(0,1)$, astfel încât $f''(c)=0$.

Gazeta Matematică

Soluţie. a) Axa de simetrie a graficului unei funcţii de gradul al doilea este dreapta verticală care trece prin vârful parabolei asociate. **1,5p**

Prin urmare, funcţiile de gradul al doilea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care au graficul simetric în raport cu dreapta de ecuaţie $x=\frac{1}{2}$ sunt de forma:

$g(x)=a\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+d=a\cdot\left(x^2-x\right)+b$, cu $a,b,d\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $b=d+\frac{a}{4}$. **3p**

$\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx=a\cdot\int_0^1 x^2\cdot f(x)\,dx-a\cdot\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx+b\cdot\int_0^1 f(x)\,dx=0.$ **3p**

b) f'' fiind o funcţie continuă, funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=f''(x)\cdot(x^2-x)^2$ este continuă, deci este integrabilă. **3p**

$$\int_0^1 f''(x)\cdot(x^2-x)^2\,dx=f'(x)\cdot(x^2-x)^2\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\cdot 2(x^2-x)\cdot(2x-1)\,dx=$$

$$=0-2f(x)\cdot(x^2-x)\cdot(2x-1)\Big|_0^1+2\cdot\int_0^1 f(x)\left((2x-1)^2+2(x^2-x)\right)\,dx=$$

$$=0+2\cdot\int_0^1 f(x)\cdot(6(x^2-x)+1)\,dx\,.$$

Conform punctului a), pentru $a=6$ şi $b=1$, se obţine $\int_0^1 f''(x)\cdot(x^2-x)^2\,dx=0$. **6p**

Rezultă că există $c\in(0,1)$ astfel încât $f''(c)\cdot(c^2-c)^2=0$. **3p**

Cum $(c^2 - c)^2 = c^2 \cdot (c-1)^2 \neq 0$, pentru orice $c \in (0,1)$, rezultă că $f''(c) = 0$. **3p**

Observaţie: În situaţia în care un concurent observă că una dintre funcţiile $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = a(2x-1)$ ($a \in \mathbb{R}^*$) are proprietatea din enunţ, fără să rezolve problema, primeşte câte 1,5 puncte pentru fiecare dintre aceste două exemple. Punctele astfel obţinute **nu se cumulează** cu cele alocate rezolvărilor parţiale sau complete ale problemei.

Problema 2. *a) Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar $f : G \longrightarrow G$ un endomorfism al său. Arătaţi că mulţimea $F_f = \{x \in G |\, f(x) = x\}$ a punctelor fixe ale endomorfismului f este un subgrup al grupului G.*
b) Fie $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 2$, iar p cel mai mic divizor prim al lui n. Arătaţi că numărul $m = \dfrac{n}{p} + 1$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea că în orice grup finit $(G, \cdot)$ de ordin n, dacă pentru un endomorfism $f : G \to G$ există un automorfism $g : G \to G$ cu proprietatea că mulţimea $A = \{a \in G |\, f(a) = g(a)\}$ are cel puţin m elemente, atunci f este un automorfism al grupului G.

Soluţie.
a) Fie e elementul neutru al grupului G. Deoarece $(f(e))^2 = f(e^2) = f(e)$, rezultă că $f(e) = e$, deci $e \in F_f$ şi $F_f \neq \emptyset$. **1,5p**
Pentru orice $x, y \in F_f$ avem

$$f(x \cdot y^{-1}) = f(x) \cdot (f(y))^{-1} = x \cdot y^{-1}\,,$$

aşadar $x \cdot y^{-1} \in F_f$. Prin urmare, F_f este un subgrup al grupului G. **6p**
b) Vom arăta că orice endomorfism al unui grup finit de ordin n care coincide cu un automorfism al grupului în cel puţin m puncte este egal cu acel automorfism (deci este un automorfism).
Fie $(G, \cdot)$ un grup de ordin n şi $End(G)$, respectiv $Aut(G)$, mulţimea tuturor endomorfismelor, respectiv mulţimea tuturor automorfismelor sale. Fie $f \in End(G)$ un endomorfism cu proprietatea că există un automorfism $g \in Aut(G)$ astfel încât mulţimea $A = \{a \in G |\, f(a) = g(a)\}$ conţine cel puţin m elemente.
g fiind un automorfism, este un endomorfism bijectiv, iar funcţia sa inversă g^{-1} este de asemenea un automorfism al grupului G. **3p**
Fiind compunere de endomorfisme, funcţia $h = g^{-1} \circ f$ este un endomorfism al grupului G, iar mulţimea punctelor sale fixe este

$$F_h = \{a \in G |\, h(a) = a\} = \{a \in G |\, g^{-1}(f(a)) = a\} = \{a \in G |\, f(a) = g(a)\} = A.$$

. . . . **3p**
Din a), F_h este un subgrup al grupului G şi are cel puţin m elemente. Conform teoremei lui Lagrange, ordinul oricărui subgrup al unui grup finit este un divizor al ordinului grupului. Cum $\dfrac{n}{p}$ este cel mai mare divizor al lui n, mai mic strict decât n, deoarece $|F_h| \geq m = \dfrac{n}{p} + 1 > \dfrac{n}{p}$ şi $|F_h|$ divide $|G| = n$, rezultă că $|F_h| = n = |G|$, aşadar $F_h = G$. **3p**
Prin urmare, $f(a) = g(a)$ pentru orice element $a \in G$, deci $f = g \in Aut(G)$. Aşadar f este un automorfism al grupului G. **3p**
Fie $G = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$, unde $q = \dfrac{n}{p}$. Pentru grupul $(G, +)$, alegem $f : G \longrightarrow G$, $f(x, y) = (x, \hat{0})$,

oricare ar fi $(x, y) \in \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$. Funcţia f este un endomorfism al unui grup de ordin n, cu proprietatea că mulţimea $A = \{(x, y) \in G |\, f(x, y) = id_G(x, y)\}$ are $q = \dfrac{n}{p} = m - 1$ elemente (prin id_G am notat automorfismul identic al grupului G), dar f nu este un automorfism al grupului G. Prin urmare, m este cel mai mic număr cu proprietatea din enunţ........................ **3p**

Problema 3. *Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e, iar H un subgrup al său cu $H \neq \{e\}$ şi $H \neq G$. Dacă $(xy)^2 = yx$ pentru orice $x, y \in G \setminus H$, demonstraţi că:*
a) $x^2 = y^3$, pentru orice $x \in G \setminus H$ şi orice $y \in H$;
b) $Z(G) = \{e\}$;
c) H este comutativ.
($Z(G) = \{z \in G |\, z \cdot g = g \cdot z, \forall g \in G\}$ este centrul grupului G, format din toate elementele grupului G care comută cu orice element al grupului G.)

Soluţie.
a) Pentru $x = y \in G \setminus H$, relaţia din ipoteză devine $x^4 = x^2$ de unde obţinem că $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus H$. (1) **3p**
Fie $x \in G \setminus H$ şi $y \in H$. Deoarece H este subgrup al lui G, avem $xy \in G \setminus H$. **1,5p**
Rezultă atunci că: $y^2 \overset{(1)}{=} (x^2y)^2 = (x(xy))^2 = (xy)x = xyx$, ... **3p**
deci $y^3 = xyxy = (xy)^2 \overset{(1)}{=} e \overset{(1)}{=} x^2$. **3p**

b) Pentru orice $x \in G \setminus H$ şi $y \in H \setminus \{e\}$, din a) rezultă că $xy = (xy)^{-1} = y^2x \neq yx$. **3p**
Prin urmare, niciun element $x \in G \setminus H$ şi niciun element $y \in H \setminus \{e\}$ nu se află în $Z(G)$ şi, în consecinţă, $Z(G) = \{e\}$ **3p**

c) Oricare ar fi $x \in G \setminus H$ şi $h \in H$, din $(xh)^2 = e$ rezultă că $xhx = h^{-1}$, deci $h = xh^{-1}x$ $(*)$
.... **3p**
Pentru orice $h_1, h_2 \in H$ şi $x \in G \setminus H$ avem atunci:

$$h_1h_2 \overset{(*)}{=} x\,(h_1h_2)^{-1}\,x = xh_2^{-1}h_1^{-1}x = xh_2^{-1}x^2h_1^{-1}x = \left(xh_2^{-1}x\right)\left(xh_1^{-1}x\right) \overset{(*)}{=} h_2h_1,$$

aşadar H este comutativ. **3p**

Observaţie: Subgrupul H este, în condiţiile problemei, un subgrup normal al grupului G, iar aplicaţia de inversare fiind un automorfism al grupului H, ca restricţie la H a oricărui automorfism interior al lui G indus de un element oarecare $x \in G \setminus H$, grupul H este comutativ. Orice soluţie care arată acest lucru va primi complet punctajul de **6p** aferent subpunctului c).

Problema 4. *Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcţie continuă şi bijectivă, cu proprietatea că*

$$f(x) < x, \quad \textit{pentru orice } x \in (0, 1).$$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ funcţii}}$ *şi* $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
a) Demonstraţi că pentru orice $x \in (0, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
b) Determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Soluţie.
a) Deoarece f este continuă, trecând la limită, când $x \to 0$, din inegalitatea din enunţ obţinem $0 \leqslant f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) \leqslant 0$, deci $f(0) = 0$. **1,5p**
Funcţia f este continuă şi injectivă, deci este strict monotonă. Deoarece $f(0) = 0$, rezultă că f este strict crescătoare. **3p**
Fie $x \in (0,1)$. Din $f(x) < x$ rezultă inductiv că $0 < f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) < f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Deoarece şirul $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ este strict descrescător şi mărginit, există $a(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \in [0,1)$.
Folosind continuitatea funcţiei f rezultă că

$$a(x) = \lim_{n \to \infty} f_{n+1}(x) = \lim_{n \to \infty} f(f_n(x)) = f\left(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\right) = f(a(x)),$$

aşadar $a(x) = 0$, adică $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, oricare ar fi $x \in (0,1)$. **3p**

b) Fie $\varepsilon \in (0,1)$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fiind compunere de funcţii bijective strict crescătoare, funcţia f_n este bijectivă şi strict crescătoare, cu $f_n(1) = 1$. **3p**
Obţinem că

$$0 < I_n = \int_0^{1-\varepsilon} f_n(x)\,dx + \int_{1-\varepsilon}^{1} f_n(x)\,dx \leqslant (1-\varepsilon) \cdot f_n(1-\varepsilon) + \varepsilon \cdot f_n(1) = (1-\varepsilon) \cdot f_n(1-\varepsilon) + \varepsilon.$$

.... **6p**
Cum $1 - \varepsilon \in (0,1)$, conform a) obţinem că $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(1-\varepsilon) = 0$, astfel că

$$0 \leq \liminf I_n \leq \limsup I_n \leq \varepsilon\,.$$

.... **3p**
Cum $\varepsilon \in (0,1)$ a fost oarecare, rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$. **3p**

Observaţie: În limbaj de integrabilitate Lebesgue (teorie neelementară), enunţul este o consecinţă a teoremei convergenţei dominate (care nu are o demonstraţie elementară). Concurenţilor care invocă teoreme de teoria măsurii, pentru a rezolva punctul b) al problemei, li se va acorda punctajul doar în cazul în care enunţă corect aceste teoreme şi verifică dacă sunt îndeplinite toate condiţiile pentru aplicarea lor.